

U. Didáctica 7: Sistemas de ecuaciones

RECUERDA

- Una **ecuación lineal con dos incógnitas** es una ecuación de primer grado de la forma $ax + by = c$, donde:
 - Los números a y b son los coeficientes de la ecuación
 - x e y son las incógnitas
 - c es el término independienteLa soluciones de la ecuación $ax + by = c$ son los pares de valores que toman x e y que cumplen la igualdad. Tiene infinitas soluciones
- Un **sistema** de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es un par de ecuaciones de primer grado de la forma
$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$
 - Los números a, b, c, d son los coeficientes del sistema, x e y son las incógnitas y e y f son los términos independientes.
- Un par de números son una **solución** del sistema $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ cuando verifican las dos ecuaciones a la vez.
- Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones

Ejercicios

1. Indica las incógnitas, los coeficientes y los términos independientes de cada sistema.

a)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x + 9y = 10 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{x}{2} = y \\ x - \frac{y}{3} = 5 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \frac{3x}{4} + \frac{4y}{3} = 5 \\ x - 7y = -10 \end{cases}$$

2. Indica si la pareja de valores es solución o no de cada sistema de ecuaciones

a) $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 5y = 16 \end{cases} \quad (x = 3, y = 2)$

b) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - \frac{2}{3}y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (x = 3, y = -2)$

c) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 2y = -4 \\ 2x - \frac{y}{3} = 1 \end{cases} \quad (x = -4, y = -27)$

3. Indica qué sistemas son equivalentes a $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$ con solución $(x = 3, y = 1)$

a) $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 3x + 9y = 18 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{3x}{2} + \frac{y}{2} = 10 \\ \frac{x}{2} - \frac{3y}{2} = 3 \end{cases}$

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS MEDIANTE EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Para **resolver un sistema** de ecuaciones lineales por el **método de sustitución** se dan los siguientes pasos:

- 1) Se elige una de las dos incógnitas y se despeja en una de las dos ecuaciones.
- 2) Se sustituye la incógnita despejada en la otra ecuación
- 3) Se resuelve la ecuación obtenida
- 4) Sustituyendo este valor en la ecuación despejada, se obtiene el valor de la otra incógnita

Ejemplo: Resuelve el sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ x + 5y = 38 \end{cases}$ mediante el método de sustitución.

- *Primero. Despejamos la x en la primera ecuación:* $x = \frac{12+2y}{3}$
 - *Segundo. Sustituimos este valor en la segunda ecuación:* $\frac{12+2y}{3} + 5y = 38$
 - *Tercero. Resolvemos la ecuación:* $\frac{12+2y}{3} + \frac{15y}{3} = \frac{114}{3} \Rightarrow 12 + 2y + 15y = 114 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 17y = 102 \Rightarrow y = \frac{102}{17} = 6$
 - *Cuarto. Sustituimos la y de la expresión del primer paso por 6 y averiguamos el valor de la x*
 $x = \frac{12+2y}{3} = \frac{12+2 \cdot 6}{3} = \frac{12+12}{3} = \frac{24}{3} = 8$
- Solución:** $x = 8, y = 6$

4. Opera y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución.

a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 5x - y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 4y = -8 \\ -2x + y = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 5 \\ -x + 2y = -2 \end{cases}$

$$\text{d)} \quad \begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$\text{e)} \quad \begin{cases} 10(x - 2) + y = 1 \\ x + 3(x - y) = 5 \end{cases}$$

$$\text{f)} \quad \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{5} = \frac{11}{5} \\ \frac{4x - 5y}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\text{g)} \quad \begin{cases} \frac{2(6x - 4)}{4} + \frac{3(y - 1)}{6} = 0 \\ 3(2x - y) - (6x + 3y) = 6 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS MEDIANTE EL MÉTODO DE IGUALACIÓN

Para **resolver un sistema** de ecuaciones lineales por el **método de igualación** se dan los siguientes pasos:

- 1) Se elige una de las dos incógnitas y se **despeja en las dos ecuaciones**.
- 2) Se igualan los términos obtenidos
- 3) Se resuelve la ecuación que queda para obtener el valor de la incógnita
- 4) Se sustituye este valor en una de las ecuación despejadas y se obtiene el valor de la otra incógnita

Ejemplo: Resuelve el sistema $\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 3x + 5y = -9 \end{cases}$ mediante el método de igualación.

- *Primero. Despejamos la y en las dos ecuaciones:* $y = \frac{2-4x}{2}$, $y = \frac{-9-3x}{5}$
- *Segundo. Igualamos los segundos miembros:* $\frac{2-4x}{2} = \frac{-9-3x}{5}$
- *Tercero. Resolvemos la ecuación:* $\frac{2-4x}{2} = \frac{-9-3x}{5} \Rightarrow 5 \cdot (2 - 4x) = 2 \cdot (-9 - 3x) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 10 - 20x = -18 - 6x \Rightarrow -20x + 6x = -18 - 10 \Rightarrow -14x = -28 \Rightarrow x = \frac{-28}{-14} = 2$
- *Cuarto. Cogemos una de las expresiones del primer paso y sustituimos la x por 2 para calcular el valor de la y*

$$y = \frac{2-4 \cdot 2}{2} = \frac{2-8}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Solución: $x = 2$, $y = -3$

5. Utiliza el método de igualación para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

a) $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -4x + 3y = -7 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 9y = -3 \end{cases}$

$$\text{d) } \begin{cases} 4x + y = 17 \\ -x + 2y = -2 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x - (y + 1) = 3 \\ y + (x + 2) = 4 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} \frac{x + 4y}{3} + \frac{x - y}{5} = \frac{2}{3} \\ -x + 5y = 13 \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} \frac{2x - 3y}{2} - \frac{6x + 3}{6} = -2 \\ -9x + 2y = 11 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS MEDIANTE EL MÉTODO DE REDUCCIÓN

El método de **reducción** consiste en transformar un sistema en otro equivalente, de modo que en alguna de las dos ecuaciones aparezca sólo una incógnita. Para aplicarlo se siguen los siguientes pasos.

- 1) Se **multiplican** las ecuaciones por los números adecuados para igualar el coeficiente de una de las dos incógnitas.
- 2) Sumando o restando las ecuaciones obtenidas, se **elimina** la incógnita con coeficientes iguales.
- 3) Se obtiene, despejando en la ecuación resultante, el valor de la incógnita que queda.
- 4) Se sustituye el valor de incógnita obtenido en una de las dos ecuaciones iniciales del sistema, para calcular el valor de la otra incógnita.

Ejemplo: Resuelve el sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - 2y = 8 \end{cases}$ mediante el método de reducción.

- *Primero. Multiplicamos la ecuación de arriba por 5 y la ecuación de abajo por 2 para que los coeficientes de la x tengan el mismo valor:* $\begin{cases} (2x + 3y = 7) \cdot 5 \\ (5x - 2y = 8) \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x + 15y = 35 \\ 10x - 4y = 16 \end{cases}$
 - *Segundo. Se resta la segunda ecuación a la primera* $\begin{cases} 10x + 15y = 35 \\ -10x + 4y = -16 \\ \hline 0x + 19y = 19 \end{cases}$
 - *Tercero. Se despeja el valor de la incógnita que queda:* $19y = 19 \Rightarrow y = \frac{19}{19} = 1$
 - *Cuarto. Cogemos una de las ecuaciones de principio y sustituimos la y por 1 para calcular el valor de la x :* $2x + 3 \cdot 1 = 7 \Rightarrow 2x = 7 - 3 = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$
- Solución:** $x = 2, y = 1$

6. Resuelve por el método de reducción los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ -3x + 2y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + 2y = -14 \\ 10x - 2y = -14 \end{cases}$

$$\text{d) } \begin{cases} 6x + 8y = -14 \\ 5x - 4y = -1 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 2x + 3y = 5 + x + 2y \\ x - 2y - 3 = 3 - 4y \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 3x - 2(y - 1) = y - x + 1 \\ 2x - y = x + y - 9 \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} \frac{2(3x-1)}{3} + \frac{3(4y+1)}{4} = \frac{1}{12} \\ 3(2x-y) - 5(x+4y) = 6 \end{cases}$$

7. Opera y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método que consideres oportuno en cada caso.

a)
$$\begin{cases} 2x - 5y + 8 = 0 \\ -x + 4y + 11 = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - 3(y + 1) = 0 \\ x + 2(x - y) = 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \frac{x + 3y}{4} = \frac{5}{2} \\ 4 - \frac{2x - y}{2} = 1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \frac{x + 1}{6} - \frac{y - 1}{4} = 0 \\ \frac{x + 2y}{9} - \frac{x + y + 2}{12} = 0 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON SISTEMAS DE ECUACIONES

Para resolver un problema usando un sistema de ecuaciones se siguen los siguientes pasos:

- 1) Comprender el problema: identificar los datos e incógnitas, buscar sus relaciones, hacer un dibujo, un esquema, etc.
- 2) Trazar un plan para resolverlo: plantear el sistema de ecuaciones correspondiente
- 3) Poner en práctica el plan: resolver el sistema de ecuaciones eligiendo el método de resolución más adecuado.
- 4) Comprobar los resultados: comprobar si la solución obtenida tiene sentido en el contexto del problema e interpretar el resultado.

8. El abuelo de Juan tiene una granja donde cría conejos y gallinas. Si al principio de año cuenta con un total de 50 animales y 160 patas, ¿cuántos animales de cada clase hay?

9. Fátima va de vacaciones con su familia a un hotel que tiene habitaciones dobles y sencillas. En recepción, el conserje le dice que en total hay 50 habitaciones y 88 camas. ¿Cuántas habitaciones dobles y sencillas hay en dicho hotel?

10. Halla las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 60 cm y que la base es el doble de la altura.



- 11.** En un taller hay 35 vehículos entre coches y motos. Si el número total de ruedas es 116, sin contar las de repuesto, ¿cuántos coches y cuántas motos hay?
- 12.** ¿Cuántos litros de leche de 0,75 €/litro hay que mezclar con leche de 0,85 €/litro para conseguir 100 litros de mezcla a 0,77 €/litro?
- 13.** El número 473 se puede expresar como la suma de dos números distintos, de tal manera que, al dividir el mayor de ellos entre el menor, el cociente es 7 y el resto es 9. ¿Cuáles son los números?
- 14.** En una fábrica de ladrillos se mezclan dos tipos de arcilla, una de 21€ la tonelada, y otra, de 45€ la tonelada. ¿Cuántas toneladas de cada clase hay que mezclar para conseguir 500 toneladas de arcilla de 39€ cada tonelada?

- 15.** Noemí tiene 4 años más que su prima Daniela, y dentro de tres años, entre las dos primas, sumarán 20 años. ¿Cuántos años tienen Noemí y Daniela actualmente?
- 16.** Un número excede en 15 unidades a otro, y si restáramos 5 unidades a cada uno de ellos, entonces el primero sería igual al doble del segundo. ¿Cuáles son los números?
- 17.** Para el cumpleaños de Irene se han comprado bocadillos de tortilla a 2,50 € la unidad y sándwiches de 2,80 € cada uno. En total se han pagado 48 € y se han comprado 18 aperitivos, entre bocadillos y sándwiches. ¿Cuántos se han comprado de cada clase?
- 18.** Martín ahorra todas las monedas de 0,10€ y 0,20€ que consigue metiéndolas en una hucha. Después de dos meses ahorrando, ha conseguido ahorrar 15€ metiendo un total de 100 monedas en la hucha. ¿Cuántas monedas de cada tipo ha ahorrado?